离散数学

第二章: 一阶逻辑

卢杨
厦门大学信息学院计算机科学与技术系
luyang@xmu.edu.cn

命题逻辑的局限性

- 在命题逻辑中，简单命题作为基本研究单位，对它不再进行分解. 不考虑命题之间的内在联系，只考虑一个命题的真假. 这样就忽略了命题丰富的内涵.
- 有时甚至无法判断一些简单而又常见的推理. 例如典型的苏格拉底三段论:

例 p: 凡人都是要死的.

q: 苏格拉底是人.

r: 苏格拉底是要死的.

- $p \wedge q \rightarrow r$表示这个推理. 直观上看，推理正确，r是前提p和q的有效结论. 但推理的形式结构不是重言式，这反映了命题逻辑的局限性.

命题逻辑的局限性

- 原因是只将p, q, r看成独立的命题，不考虑其内在联系. 不能对简单命题自身的内部特征作进一步的分析，无法揭示前提和结论在形式结构方面的联系，因此就不可能认识到这种推理的形式和规律，这就使得命题逻辑的适用面比较狭窄.

例 p: 熊猫是动物.

q: 长颈鹿是动物.

- 它们是两个简单命题，只能用两个不同的符号来表示，但这样的符号不能揭示这两个命题的共性. 实际上，它们之间是有联系的.
- 因此，对简单命题的成分，结构和简单命题间的共同特性等作进一步的分析，分析出其中的个体词，谓词，量词，再研究它们之间的关系，总结出正确的推理形式和规则，这就是一阶逻辑 (又称谓词逻辑或一阶谓词逻辑) 所要研究的内容.

2.1 一阶逻辑的基本概念

个体词与谓词

- 在一阶逻辑中, 简单命题被分解为个体词 (主语) 与谓词 (谓语) 两部分.

例 (1) 2是素数.

(2) 你是个好人.

(3) 易烊千玺比王俊凯帅.

- 个体词是指可以独立存在的客体, 它可以是一个具体的事物, 或是一个抽象的概念.

例 上例中的2, 你, 易烊千玺, 王俊凯, 以及计算机, 熊猫, 围棋, 自然数, 定理, 思想, 爱情等都可以充当个体词.

- 谓词是用来刻画个体词的性质及个体词之间的关系的词.

例 上例中的"…是素数", "…是个好人", "…比…帅"都是谓词, 前两个谓词表示事物的性质, 后一个谓词表示事物之间的关系.

个体词与个体域

- 表示具体的, 特指的个体词, 称为个体常项, 常用小写字母$a, b, c, \ldots$来表示.

  例　地球, 科比, 美国队长, 那个漂亮的小姐姐.

- 表示抽象的, 泛指的, 或在一定范围内变化的个体词, 称为个体变项, 常用小写字母$x, y, z, \ldots$来表示.

  例　教科书, 自然数, 人, 漂亮的小姐姐.

- 称个体变项的取值范围为个体域或论域.
  - 个体域可以是有穷集合 ($\{1,2,3,4,5\}$或$\{a, b, c, \ldots, x, z, y\}$) 或无穷集合 (自然数集合, 实数集合, 整数集合) .
  - 最大的个体域是包含宇宙全体事物的个体域, 称为全总个体域.
  - 若无特别声明时, 个体域均指全总个体域.

谓词

- 称表示有具体性质或关系的谓词，称为谓词常项．表示抽象的或泛指的谓词称为谓词变项.
- 谓词都用$F, G, H, \ldots$表示, 根据上下文的具体情况确定是谓词变项还是常项.
  - 个体常项a或变项x具有性质F, 记作$F(a)$或$F(x)$.
  - 个体常项a与b, 变项x与y, 或a与x具有关系G, 记作$G(a,b), G(x,y)$或$G(a,x)$.

例 当F的含义未指定时, F是谓词变项. 当F表示“…是素数”时, F是谓词常项.

当a表示2时, $F(a)$表示“2是素数”.

当F的含义不变时, $F(x)$表示“x是素数”.

$F(a)$是命题; $F(x)$不是命题, 是命题变元, 因为x是个体变项.

谓词

- 谓词中包含个体的数目称为谓词的元数.
- 含$n(n \geq 1)$个个体的谓词称为n元谓词.
  - 1元谓词是描述个体性质的;
  - $n(n \geq 2)$元谓词刻画个体之间关系的.
- 用$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$抽象地表示$n(n \geq 1)$元谓词，它是以个体域为定义域, 以$\{0,1\}$为值域的n元函数, 它不是命题.
  - 想要使其成为命题，必须指定P的含义使其成为谓词常项，并且用个体常项$a_1, a_2, \dots, a_n$取代$x_1, x_2, \dots, x_n$.

谓词

- 将不带个体变项的谓词称为0元谓词. 命题逻辑中的命题常项与变项都可用0元谓词表示, 因而可把命题看作是谓词的特殊情况.
  - 例如$L(a,b)$为0元谓词. 当L仍为谓词变项时, 它仍为命题变项. 一旦L的意义明确后, 它就变成命题了.
- 命题逻辑中的连结词, 等值式, 推理定律等均可在一阶逻辑中使用, 只是要注意一阶逻辑的特殊性就是了.

谓词

例2.1 将下列命题在一阶逻辑中用0元谓词符号化, 并确定它们的真值:

(1) 4是偶素数.

(2) 如果3大于2, 则3大于4.

(3) 若4大于3且3大于2, 则4大于2.

解

(1) $F(x)$: x是偶数, $G(x)$: x是素数, a: 4. 命题符号化为: $F(a) \wedge G(a)$.

因为$G(a)$为假, 所以命题的真值为假.

(2) $F(x,y)$: $x > y$, a: 3 , b: 2 , c: 4 . 命题符号化为: $F(a,b) \rightarrow F(a,c)$.

因为$F(a,b)$为真, $F(a,c)$为假, 所以命题的真值为假.

(3) $F(x,y)$: $x > y$, a: 4 , b: 3 , c: 2. 命题符号化为: $F(a,b) \wedge F(b,c) \rightarrow F(a,c)$.

3个0元谓词均为真, 所以命题的真值为真.

量词

- 在命题中分析出个体和谓词后，仍不足以表达日常生活中各种问题的逻辑衔接.
- 现在考虑如下形式的命题在一阶逻辑中符号化的问题:

  (1) 所有的活人都呼吸.

  (2) 有的人吸烟.
- 在以上两个命题中，除了有个体词和谓词外，还有表示数量的词 (所有的，有的) .
- 问题在于“所有的”和“有些”这种量词还没有分析出来，因此必须在命题中引入量词.

量词

量词分为两种:

(1) 全称量词"$\forall$": 对应常用语言中的"所有", "任意", "一切", "每一个"等. $\forall x$表示对个体域中的所有个体, x称为全称性变项, $\forall x F(x)$表示个体域里所有个体都有性质F. ($\forall$: All里的A上下颠倒, 读作"任意")

(2) 存在量词"$\exists$": 对应常用语言中的"存在着", "有一个", "有些", "至少存在一个"等. $\exists x$表示存在个体域中的个体, x称为存在性变项, $\exists x F(x)$表示存在着个体域中的个体具有性质F. ($\exists$: Exist里的E左右颠倒, 读作"存在")

- 量词也可看作是对个体词所附加约束的词.
- 量词也可用于区别个体常项与个体变项. 只有个体变项才可以冠以量词.

例　可以说"所有人…", "存在一个人…", 但是不能说"所有科比…", "存在一个科比…".

量词

- 由于量词涉及范围, 所以与个体域密切相关. 使用量词将命题符号化后真值与所用个体域有关.
- 考虑前面两个命题的符号化问题. 首先考虑当个体域为活人类集合D.
  - (1)符号化为: $\forall x F(x)$, 其中$F(x)$: x要呼吸. 命题为真.
  - (2)符号化为: $\exists x G(x)$, 其中$G(x)$: x吸烟. 命题为真.
- 本个体域只有人而无其他事物, 以上两个命题均讨论人的性质, 所以命题符号化形式很简单.

量词

- 现将个体域改为全总个体域D'.
  - 若将(1)仍符号化为：$\forall x F(x)$的形式，其涵义变成了"宇宙间的一切事物都要呼吸"，变成了假命题.
  - 若将(2)仍符号化为: $\exists x G(x)$的形式, 表示"宇宙间有的事物吸烟", 也没有表达有的人吸烟，只是表达有的东西吸烟，是"有的人吸烟"的必要非充分条件. 虽然还是真命题, 但这与原命题想表达的意思不一样了.
- 在个体域D'中要想将(1)，(2)正确符号化并表达与在D中相同的含义，必须将与个体域相关的个体（"人"）从中分离出来. 这就需要引入新的谓词，称这样的谓词为特性谓词，用于对个体变化的真正取值范围加以限制.

量词

- 此例中, 特性谓词为$M(x)$: x是活人.
- 让(1)与(2)在个体域为D'中的涵义与D相同, 可作如下叙述:

(1) 对宇宙间的一切事物, 如果它是活人, 则它要呼吸.

- 应符号化为$\forall x\big(M(x) \to F(x)\big)$, 仍为真命题. 对全称量词后的特性谓词应作为蕴涵式的前件.
- 若此处使用合取，就会将各种个体不加区分地混为一体，从而得出不正确的含义. $\forall x\big(M(x) \wedge F(x)\big)$变为"宇宙间的一切事物都是活人且要呼吸".

(2) 在宇宙间存在会吸烟的人.

记住, 这是固定搭配

- 应符号化为$\exists x\big(M(x) \wedge G(x)\big)$, 仍为真命题. 对存在量词后的特性谓词应作为合取式的一项.
- 若此处使用蕴涵，意思也发生了扭曲. $\exists x\big(M(x) \to F(x)\big)$变为"宇宙间存在某个东西，如果它是活人，则它会抽烟". 这个命题当所有活人都不抽烟的时候也为真，因为宇宙间总有不是人的东西, 使得$M(x)$为假.

量词

- 当给定个体域时，需要比较命题中个体变项与个体域的包含关系. 当个体变项是个体域的真子集时，才需要引入特性谓词.
  - 也就是说，只有个体域的范围比个体变项的范围更大时，才需要特性谓词.
- 在上例中，仅当取个体域为全总个体域时，才需要引入特性谓词. 若个体域为“黄种活人集合”，则无需引入特性谓词. 因为个体变项 (人) 不是个体域 (黄种活人) 的真子集.

量词

例 2.2 在一阶逻辑中将下列命题符号化: (1) 自然数皆为整数. (2) 有的自然数是负数.

要求: (I) 个体域为自然数集合**N**; (II) 个体域为实数集合**R**.

解 (I) (1), (2)均讨论**N**中全体元素的性质, 因而不用引入特性谓词.

(1) $\forall x F(x)$, 其中$F(x)$: x为整数. 是真命题.

(2) $\exists x G(x)$, 其中$G(x)$: x为负数. 是假命题.

(II) (1), (2)均讨论**R**的真子集**N**中全体元素的性质, 因而需要引入特性谓词: $N(x)$: x为自然数.

(1) $\forall x(N(x) \rightarrow F(x))$, 其中$F(x)$: x为整数. 是真命题.

(2) $\exists x(N(x) \wedge G(x))$, 其中$G(x)$: x为负数. 是假命题.

量词

在一阶逻辑中, 使用量词时应注意下列要点:

(1) 在不同的个体域中, 命题符号化的形式可能不同, 命题的真值也可能会改变.

(2) 如果个体域未做声明, 一律使用全总个体域.

(3) 多个量词同时出现时, 不能随意颠倒它们的顺序, 否则会改变原命题的含义.

(4) 在引入特性谓词后, 全称量词后特性谓词为蕴涵式, 存在量词后的特性谓词应作为合取式. (固定搭配)

(5) n元谓词由于包含个体变项, 并不是命题. 当个体域和谓词的涵义确定后, n元谓词要转化为命题至少需要n个量词.

量词

例　取个体域D为实数集合, 将该命题符号化: 对于任意的x, 都存在y, 使得$x + y = 5$.

解　设$H(x,y)$: $x + y = 5$, 则该命题可符号为

$$\forall x \exists y H(x,y)$$

这是一个真命题. 但若颠倒了量词的次序, 得到

$$\exists y \forall x H(x,y)$$

此时公式的含义为: 存在y, 对于所有的x, 都有$x + y = 5$. 这显然是个假命题. 因此不能随便颠倒量词的次序, 以免改变命题的含义.

量词

例　在一阶逻辑中将下列命题符号化:

(1) 上离散数学的人未必都不会挂科.

(2) 并非一切劳动都存在能够代替的机器.

解 (1) 设$F(x)$: x是上离散数学的人, $G(x)$: x的离散数学挂了. 命题表示为:

$$\neg\forall x\big(F(x)\rightarrow\neg G(x)\big)\text{或}\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

(2) 设$F(x)$: x是一种劳动, $G(x)$: x是一种机器, $H(x,y)$: x能够代替y. 命题表示为:

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(y,x)))$$

量词

- 在引入个体词, 谓词和量词后, **数学上的所有概念和定理都可以表示为一阶逻辑的命题**, 因而可以用数理逻辑中的方法来研究数学的内容.

例取个体域D为实数集合, 将数学分析中函数$f(x)$在点a连续的定义用一阶逻辑符号化:

对任意的$\epsilon > 0$, 存在一个$\delta > 0$, 使得对所有x, 若$|x-a| < \delta$, 则$|f(x)-f(a)| < \epsilon$.

解设$g(x): |x|$, $h(x,y): x-y$, $G(x,y): x > y$. 该定义作为命题表示为:

$$\forall\epsilon\left(G(\epsilon,0)\rightarrow\exists\delta\left(G(\delta,0)\wedge\forall x\left(\left(G\left(\delta,g\left(h(x,a)\right)\right)\right)\rightarrow G\left(\epsilon,g\left(h\left(f(x),f(a)\right)\right)\right)\right)\right)\right).$$

量词

- 有了谓词的概念和符号表示，就可以更深刻地刻划事物的属性以及它们之间的关系.
- 一阶逻辑是命题逻辑的推广，命题逻辑是一阶逻辑的特殊情形. 从而命题逻辑的很多概念和规则, 都可推广到一阶逻辑中延用.
- 然而，在一阶逻辑中出现了个体变项，谓词和量词等新概念，给我们的讨论带来复杂性, 尤其是个体域常是无限的, 这加大了处理难度.

量词

- 一个简单又深刻的例子是: 命题逻辑里, 一个公式不难判断它是否是重言式, 因为总可以用真值表进行判断. 但在一阶逻辑里, 就没有一般的能行算法, 来判断任一公式是否普遍有效(或重言) .
- 1936年Turing证明了: 当个体域D是无限集时, 对于一阶逻辑, 判定公式的重言性和矛盾性是不可解的.
- 困难就在于D是无限集以及对谓词设定的任意性. 然而, 并不排除谓词公式有子类 (如命题逻辑) 是可判定的.

课堂练习

在一阶逻辑中将下列命题符号化:

(1) 有些高中生比某些大学生还厉害.

(2) 没有哪个高中生比所有的大学生都厉害.

课堂练习

在一阶逻辑中将下列命题符号化:

(1) 有些高中生比某些大学生还厉害.

解　$F(x)$: x是高中生; $G(x)$: x是大学生; $H(x,y)$: x比y厉害. 符号化为:

$$\exists x\Big(F(x)\wedge\exists y\big(G(y)\wedge H(x,y)\big)\Big)$$

(2) 没有哪个高中生比所有的大学生都厉害.

解　$F(x)$: x是高中生; $G(x)$: x是大学生; $H(x,y)$: x比y厉害. 符号化为:

$$\neg\exists x\Big(F(x)\wedge\forall y\big(G(y)\rightarrow H(x,y)\big)\Big)$$

2.2 一阶逻辑公式及解释

一阶逻辑公式

为使符号化更为准确和规范地进行谓词演算和推理, 在本节给出一阶逻辑合式公式的概念. 为此先给出一阶逻辑部分所用的字母表.

定义 字母表定义如下:

(1) 个体常项: $a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$;

(2) 个体变项: $x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$;

(3) 函数符号: $f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$;

(4) 谓词符号: $F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$;

(5) 量词符号: $\forall, \exists$;

(6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;

(7) 括号与逗号: (,), ,.

一阶逻辑公式

定义 2.1 项的递归定义

(1) 个体常项和变项是项.

(2) 若 $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是任意的 n 元函数，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是任意的 n 个项，则 $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是项.

(3) 只有有限次地应用(1), (2)形成的符号串才是项.

- 根据定义, 常项, 变项以及由它们生成的各种函数及复合函数都叫做项.
- 项可以看作是广义的个体 (包括个体本身和个体通过函数的衍生) .

例 $a, b, x, y, z, f(x,y) = xy, g(x,y) = x^2 + y^2, h(x,y) = 2x - y$ 都是项.

$f\big(x,\ g(x,y)\big) = x(x^2 + y^2)$, $g(f(x,\ y), h(x,\ y)) = x^2y^2 + (2x - y)^2$ 等也都是项.

一阶逻辑公式

定义

设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的n元谓词, $t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的n个项, 则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式.

- 1元谓词$F(x)$, $G(y)$, 2元谓词$H(x, y)$等都是原子公式. 有了原子公式就能定义合式公式了.

定义

合式公式也称谓词公式, 简称公式, 其递归定义如下:

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若A是合式公式, 则$(\neg A)$也是合式公式.

(3) 若A, B是合式公式, 则$(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$也是合式公式.

(4) 若A是合式公式, 则$\forall x A$和$\exists x A$也是合式公式.

(5) 只有有限次地应用(1)-(4)形成的符号串才是合式公式.

- 谓词公式和命题公式的区别在于量词.

辖域

定义 2.2

在公式$\forall xA(x)$和$\exists xA(x)$中, 称x为指导变项, A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中, x的所有出现都称为约束出现, A中不是约束出现的其它变项均称为是自由出现的. 约束出现的个体变项简称为约束变项, 自由出现的个体变项简称为自由变项.

- 若量词后有括号, 在括号内的公式即为此量词的辖域.
- 若量词后无括号, 则量词后最短的公式为此量词的辖域.

辖域

例 2.6　指出下列各公式中, 各量词的辖域以及个体变项的自由出现与约束出现.

(1) $\forall x\big(F(x,y,z) \to \exists y G(x,y)\big)$.

(2) $\exists x F(x,y) \wedge G(x,y)$.

(3) $\forall x \forall y\big(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y)\big)$.

解

(1) $\forall x$的辖域是$\big(F(x,y,z) \to \exists y G(x,y)\big)$, $\exists y$的辖域是$G(x,y)$. x约束出现两次, y约束出现一次, 自由出现一次, z自由出现一次.

(2) $\exists x$的辖域是$F(x,y)$. x约束出现一次, 自由出现一次, y自由出现两次.

(3) 当多个量词连续出现, 后面的量词在前面量词的辖域之中. $\forall x$的辖域是$\forall y\big(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y)\big)$, $\forall y$的辖域是$\big(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y)\big)$. x与y都是约束出现的, 均各两次.

课堂练习

指出下列各公式中, 各量词的辖域以及个体变项的自由出现与约束出现.

(1) $\forall y\big(F(x,y) \to \exists z G(y,z)\big)$

(2) $\forall x F(x) \to \forall z G(x,y,z) \wedge F(z)$

课堂练习

指出下列各公式中，各量词的辖域以及个体变项的自由出现与约束出现.

(1) $\forall y\big(F(x,y) \rightarrow \exists zG(y,z)\big)$

解$\forall y$的辖域是$\big(F(x,y) \rightarrow \exists zG(y,z)\big)$，$\exists z$的辖域是$G(y,z)$．$x$自由出现一次，$y$约束出现两次，$z$约束出现一次.

(2) $\forall xF(x) \rightarrow \forall zG(x,y,z) \land F(z)$

解$\forall x$的辖域是$F(x)$，$\forall z$的辖域是$G(x,y,z)$．x约束出现一次，自由出现一次，y自由出现一次，z约束出现一次，自由出现一次.

闭式

定义

设A为任意一公式，若A中无自由变项，则称A是封闭的公式，简称闭式.

- 闭式与自由变项的关系，有些类似于0元谓词与个体变项.
  - 闭式针对公式，通过量词，将自由变项变为约束变项；
  - 0元谓词针对谓词，通过赋值，将个体变项变为个体常项.
- 要想使含$n(n \geq 1)$个自由变项的公式变成闭式，则至少要加n个量词. 然而有n个量词不代表就一定是闭式.

闭式

例

- $\forall x\forall y(F(x)\land G(y)\rightarrow H(x,y))$, $\exists x\exists yL(x,y)$都是闭式.
- $F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y))$, $F(x)\land G(x)$都不是闭式.
- 要使$(F(x)\rightarrow G(x,y)\land L(x,y,z))$成为闭式，需要3个量词，例如$\forall x\left(F(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\land\forall zL(x,y,z))\right)$.
- 然而$\forall x\left(F(x,y)\rightarrow\exists y(G(x,y)\land\forall zL(x,y,z))\right)$虽然有3个量词，但是却不是闭式, 因为$y$自由出现了一次.

解释

一般情况下, 一个一阶逻辑公式中含有个体常项, 变项 (自由出现的或约束出现的) , 函数的常项, 变项, 谓词的常项, 变项等. 若对个体常项, 函数变项, 以及谓词变项赋予特殊的含义, 就构成公式的一个解释, 有时使其成为命题, 有确定的真值.

定义 2.3

谓词公式A的每一个解释I由下面4部分组成:

(a) 给定个体域D_I;

(b) 对涉及的每一个个体常项赋给D_I中的一个元素;

(c) 给涉及的每一个函数符号指定D_I上的一个具体的函数;

(d) 给涉及的每一个谓词符号指定D_I上的一个具体的谓词.

设把公式A中所有个体常项, 函数符号和谓词符号替换成I中规定的对象后得到A', 称A'为A在解释I下的结果, 或称在解释I下A被解释成A'.

- 解释不包含个体变项, 因为个体变项可以通过量词进行限制.

解释

例 2.7 现有个体常项a, 函数变项$f(x,y)$, $g(x,y)$, 以及谓词变项$E(x,y)$. 给定解释I如下:

(a) 个体域为自然数集;

(b) $a = 0$;

(c) $f(x,y) = x + y$, $g(x,y) = x \cdot y$;

(d) $E(x,y)$: $x = y$.

写出下列公式在解释I下的结果并确定其真值:

(1) $\forall x E\big(f(x,a), g(x,a)\big)$;

(2) $\forall x \forall y E\big(f(x,y), f(y,x)\big)$;

(3) $\exists x E\big(f(x,y), g(x,y)\big)$

解

(1) $\forall x(x + 0 = x \cdot 0)$, 这是假命题.

(2) $\forall x \forall y(x + y = y + x)$, 这是真命题, 描述的是加法交换律.

(3) $\exists x(x + y = x \cdot y)$, y在式中自由出现, 不是命题, 真值与y的取值有关.

当$y = 0$时, 结果为$\exists x(x = 0)$, 真值为真;

当$y = 1$时, 结果为$\exists x(x + 1 = x)$, 真值为假.

解释

例 $\forall x \forall y \left(F(x) \wedge F(y) \wedge G(x,y) \rightarrow H\left(f(x,y), g(x,y)\right)\right)$是一个一阶逻辑中的公式, 没有什么意义. 但当我们给这个符号串一个解释, 使它就具有惟一的真值, 变成一个命题了.

解释1:

个体域D: 全总个体域;

谓词变项: $F(x)$: x是实数; $G(x,y)$: $x \neq y$; $H(x,y)$: $x > y$;

函数变项: $f(x,y) = x^2 + y^2$; $g(x,y) = 2xy$.

在该解释下, 本公式涵义为: 对于任意的实数x, y, 并且$x \neq y$, 则$x^2 + y^2 > 2xy$. 这是真命题.

解释2:

只将$H(x,y)$改为$x < y$, 其他情况同解释1, 则得到的命题为假命题.

解释

- 解释不代表消去所有变项，因此有的公式在具体的解释中真值确定，即变成了命题，有的公式在某些解释中真值仍然不能确定，仍不是命题.
- 闭式在任何解释中都成为命题．闭式中每个个体变项都受量词的约束，因而在具体解释中总表达一个意义确定的语句，即真命题或假命题.
- 不是闭式的公式在某一解释中，可能成为命题；也可能不能成为命题．因为可能存在自由变项.

赋值

定义

给定解释I，对公式中每一个自由变项x指定D_I中的一个值$\sigma(x)$，称作在解释I下的赋值σ.

- 当给定赋值σ时, 对公式做解释时需要代入赋值σ, 即把所有自由变项x替换成$\sigma(x)$.
- 任何谓词公式在解释和赋值下的结果都是命题.
- 闭式因为没有自由变项, 所以与赋值无关.

例 若在上例中添加给定赋值$\sigma(y)=0$，则在I和σ下，$\exists x(x+y=x\cdot y)$被解释为$\exists x(x+0=x\cdot 0)$, $\exists x(x=0)$, 真值为真.

赋值

例 $G(x,y)$是2元谓词, 解释: 指定D为实数域, $G(x,y)$: x大于y.

此时, 则G有了确定的含义, 但还不是命题.

如在解释中再给定赋值$\sigma(x)=\pi=3.14159$, $\sigma(y)=e=2.71828$, 则$G\big(\sigma(x),\sigma(y)\big)$就是命题"$\pi$大于$e$", 其真值为1.

例 $S(x)$: $x^2+1=0$是1元谓词.

若解释中的x的个体域为实数, 则这是一个矛盾式.

若解释中的x的个体域为复数, 则除了赋值$\sigma(x)=i$和$\sigma(x)=-i$是真值为1的命题外, 其余情形均为真值为0的命题.

解释

例 2.8 给定解释I如下:

(a) $D_1 = \{2,3\}$;

(b) D_1中特定元素$a = 2$;

(c) 函数$f(x)$为$f(2) = 3, f(3) = 2$;

(d) 谓词$F(x)$为$F(2) = 0, F(3) = 1$;

$G(x, y)$为$G(2, 2) = G(2, 3) = G(3, 2) = 1, G(3, 3) = 0$;

$L(x, y)$为$L(2, 2) = L(3, 3) = 1, L(2, 3) = L(3, 2) = 0$.

这是解释还是赋值?

在这个解释下, 求下列各式的真值:

(1) $\forall x \exists y L(x, y)$ (2) $\exists y \forall x L(x, y)$

解

(1) $\forall x\big(L(x, 2) \lor L(x, 3)\big) \Leftrightarrow \big(L(2,2) \lor L(2,3)\big) \land \big(L(3,2) \lor L(3,3)\big) \Leftrightarrow 1 \land 1 \Leftrightarrow 1$

(2) $\exists y\big(L(2, y) \land L(3, y)\big) \Leftrightarrow \big(L(2,2) \land L(3,2)\big) \lor \big(L(2,3) \land L(3,3)\big) \Leftrightarrow 0 \lor 0 \Leftrightarrow 0$

此结果进一步说明量词的顺序不能随便颠倒.

课堂练习

给定解释I如下:

(a) 个体域为整数集合$\mathbf{Z}$;

(b) $\mathbf{Z}$中的特定元素$a = 0$;

(c) $\mathbf{Z}$中的特定函数$f(x,y) = x - y, g(x,y) = x + y$;

(d) $\mathbf{Z}$中的特定谓词$F(x,y)$: $x < y$;

在这个解释下, 求下列各式的真值:

(1) $\forall x \forall y F\big(f(x,y), g(x,y)\big)$;

(2) $\forall x \exists y F\big(f(x,y), g(x,y)\big)$;

(3) $\forall x \Big(F(x,a) \rightarrow F\big(f(x,y), g(x,y)\big)\Big)$.

课堂练习

给定解释I如下:

(a) 个体域为整数集合**Z**;

(b) **Z**中的特定元素$a = 0$;

(c) **Z**中的特定函数$f(x, y) = x - y, g(x, y) = x + y$;

(d) **Z**中的特定谓词$F(x, y)$: $x < y$;

在这个解释下, 求下列各式的真值:

(1) $\forall x \forall \mathrm{y} F\big(f(x, y), g(x, y)\big)$

解

$$\Leftrightarrow \forall x \forall \mathrm{y}(x - y < x + y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall \mathrm{y}(0 < 2y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall \mathrm{y}(0 < y)$$

在个体域**Z**中有小于0的整数, $\forall \mathrm{y}(0 < y)$为假, 因此该式在解释$I$下真值为假.

课堂练习

给定解释I如下:

(a) 个体域为整数集合**Z**;

(b) **Z**中的特定元素$a = 0$;

(c) **Z**中的特定函数$f(x, y) = x - y, g(x, y) = x + y$;

(d) **Z**中的特定谓词$F(x, y)$: $x < y$;

在这个解释下, 求下列各式的真值:

(2) $\forall x \exists \mathrm{y} F\big(f(x, y), g(x, y)\big)$

解

$$\Leftrightarrow \forall x \exists \mathrm{y}(x - y < x + y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists \mathrm{y}(0 < 2y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists \mathrm{y}(0 < y)$$

在个体域**Z**中存在大于0的整数, $\exists \mathrm{y}(0 < y)$为真, 因此该式在解释$I$下真值为真.

课堂练习

给定解释I如下:

(a) 个体域为整数集合$\mathbf{Z}$;

(b) $\mathbf{Z}$中的特定元素$a = 0$;

(c) $\mathbf{Z}$中的特定函数$f(x, y) = x - y, g(x, y) = x + y$;

(d) $\mathbf{Z}$中的特定谓词$F(x, y)$: $x < y$;

在这个解释下, 求下列各式的真值:

(3) $\forall x\left(F(x, a) \rightarrow F\left(f(x, y), g(x, y)\right)\right)$

解

$$\Leftrightarrow \forall x\big((x < 0) \rightarrow (x - y < x + y)\big)$$
$$\Leftrightarrow \forall x\big(\neg(x < 0) \vee (-y < y)\big)$$

该式存在自由变项y且$-y < y$在个体域$\mathbf{Z}$中真值未知, 因此该式在解释I下真值为未知.

公式类型

同在命题逻辑一样, 在一阶逻辑中也将公式分类为:

定义 2.4

设A为一公式, 若A在任何解释下都为真, 则称A为重言式 (或称永真式). 如果A在任何解释下都是假的, 则称A为矛盾式 (或称永假式). 若至少存在着一种解释使A为真, 则称A是可满足式.

- 重言式一定是可满足式, 但反之不然.
- 一般情况下, 由于谓词公式的复杂性和解释的多样性, 到目前为止, **还没有一个可行的算法**, 用来判断某一**谓词公式**是否是可满足的.

公式类型

定义 2.5

设A_0是含命题变项$p_1, p_2, \dots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \dots, A_n$是n个谓词公式，用$A_i(1 \le i \le n)$处处代替A_0中的p_i，所得的公式A称为A_0的代换实例.

例 $F(x) \to G(x), \forall xF(x) \to \exists yG(y)$等是$p \to q$的代换实例;

$F(x,y) \land \forall xG(x)$，$\forall xF(x) \land \exists yG(y)$等都可以作为$p \land q$的代换实例.

- 可以证明，重言式的代换实例均为重言式，矛盾式的代换实例均为矛盾式.

公式类型

例 2.9 判断下列公式中, 哪些是重言式, 哪些是矛盾式?

(1) $\forall xF(x) \rightarrow (\forall x\exists yG(y) \rightarrow \forall xF(x))$;

(2) $((\exists xF(x) \vee \exists yG(y)) \wedge \neg\exists yG(y)) \rightarrow \exists xF(x)$;

解

(1) 此公式是$p \rightarrow (q \rightarrow p)$的代换实例，而$p \rightarrow (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee p) \Leftrightarrow 1$. 所以(1)是重言式.

(2) 此公式是$(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$的代换实例，由析取三段论可知，$(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$是重言式, 所以(2)是重言式.

公式类型

对于不是重言式和矛盾式的代换实例, 判断它们是否为重言式或矛盾式, 确实不是易事. 但对一些特殊的较简单的公式还是可以判断的.

例 2.10 (1) 讨论该公式的类型: $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$.

解

设I为任意一个解释, 其个体域为D.

- 若$\exists b \in D$, 使得$F(b)$为假, 则前件$\forall xF(x)$为假, 该公式为真.
- 若$\forall x \in D$, $F(x)$均为真, 则前件$\forall xF(x)$和后件$\exists xF(x)$都为真, 从而该公式也为真.
- 由I的任意性, 所以该公式是重言式.

公式类型

例 2.10 (2) 讨论该公式的类型: $\forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists x \forall y F(x,y)$.

解

- 取解释I如下: 个体域为自然数集N, $F(x,y)$: $x \leq y$. 在I下:
  - 前件: 对于任意自然数x, 存在大于x的自然数y, 为真.
  - 后件: 存在自然数x, 小于等于任意的自然数y, 令$x = 0$时为真.

  该公式的前件与后件均为真, 所以该公式不会是矛盾式.
- 再取解释I'如下: 个体域为自然数集N, $F(x,y)$: $x = y$. 在I'下:
  - 前件: 对于任意自然数x, 存在等于x的自然数y, 为真.
  - 后件: 存在自然数x, 等于任意的自然数y, 为假.

  该公式的前件为真, 后件为假, 故为假, 这又说明该公式不会是重言式.
- 综上所述, B是非重言式的可满足式.

课堂练习

判断下列公式中, 哪些是重言式, 哪些是矛盾式?

(1) $\neg\big(F(x) \to G(x,y)\big) \wedge G(x,y)$;

(2) $(\forall x F(x) \vee \neg\forall x F(x)) \to \big(\exists y G(y) \vee \neg\exists\, y G(y)\big)$.

课堂练习

判断下列公式中，哪些是重言式，哪些是矛盾式？

(1) $\neg\big(F(x) \to G(x,y)\big) \wedge G(x,y)$;

(2) $(\forall xF(x) \vee \neg\forall xF(x)) \to \big(\exists yG(y) \vee \neg\exists\, yG(y)\big)$.

解

(1) 此公式是$\neg(p \to q) \wedge q$的代换实例，$\neg(p \to q) \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge q \Leftrightarrow 0$. 所以(3)是矛盾式.

(2) 此公式是$(p \vee \neg p) \to (q \vee \neg q)$的代换实例，$(p \vee \neg p) \to (q \vee \neg q) \Leftrightarrow 1 \to 1 \Leftrightarrow 1$是重言式，所以(4)是重言式.

2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

等值式

- 与命题逻辑一样，在一阶逻辑的演算及推理过程中，一些等值式（重言等价式)起着很重要的作用.

定义2.6

设A, B是一阶逻辑中任意二公式, 若$A \leftrightarrow B$是重言式, 则称A和B是等值的, 记作$A \Leftrightarrow B$, 称$A \Leftrightarrow B$为等值式.

- 由于重言式的代换实例都是重言式, 1.3节中的24个等值式的代换实例都是一阶逻辑中的等值式.

例 在$P \vee \neg P$和$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$，若用$\forall xP(x)$代替$P$，用$\exists xQ(x)$代替$Q$，得到重言公式:

$$\forall xP(x) \vee \neg\forall xP(x)$$

$$(\forall xP(x) \to \exists xQ(x)) \leftrightarrow (\neg\forall xP(x) \vee \exists xQ(x))$$

换名规则

此外, 对于一阶逻辑, 还有一些特殊的规则和等值式:

1. 换名规则

- 公式$\forall xA(x)$与$\exists xA(x)$中用什么符号作为指导变项事实上是无所谓的. 就好像代数中的求和公式的下标一样, 例如把$\sum_{i=1}^{n} a_i$中的i替换成j写成$\sum_{j=1}^{n} a_j$.
- 有时同一个个体变项在同一个公式中:

  (1) 既有约束出现又有自由出现;

  (2) 在不同的辖域中约束出现.

  为避免混淆, 使一个变项在同一个公式中不同时是约束的又是自由出现的, 可采用换名规则:

  将公式A中某量词辖域中, 某约束变项的所有出现及相应的指导变项, 改成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号, A中其余部分不变, 则所得公式A'与A等值.

换名规则

例 $\forall x\big(Q(x) \to R(x,y)\big) \vee \exists z P(x,z)$

解 首先判断约束变项和自由变项. x约束出现2次, 自由出现1次, y自由出现1次, z约束出现1次. 所以只需要对x进行换名.

用约束变项x的换名规则得: $\forall u\big(Q(u) \to R(u,y)\big) \vee \exists z P(x,z)$;

但下面的换名都是不对的.

$\forall u\big(Q(u) \to R(x,y)\big) \vee \exists z P(x,z)$ (辖域内的约束变项漏了)

$\forall x\big(Q(x) \to R(x,u)\big) \vee \exists z P(x,z)$ (y并不需要换名)

$\forall u\big(Q(u) \to R(u,y)\big) \vee \exists z P(u,z)$ (辖域外的自由变项也被换了)

$\forall y\big(Q(y) \to R(y,y)\big) \vee \exists z P(x,z)$ (换成现有的个体变项符号)

等值式

2. 在有限个体域$D=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$中消去量词等值式.

- 全称量词可看作是合取联结词的推广.
- 存在量词可看作是析取联结词的推广.

(1) $\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n)$

(2) $\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\cdots\vee A(a_n)$

等值式

3. 量词否定等值式 (超常用) :

(1) $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

(2) $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

- 反映量词的特性以及量词与联结词之间的关系.
- 量词否定等值式的本质就是德 · 摩根律，当个体域为有限集$D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，其证明如下:

证明 $\neg\forall x A(x)$

$$\Leftrightarrow \neg\left(A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)\right)$$

$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \neg A(a_2) \vee \cdots \vee \neg A(a_n)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

证明 $\neg\exists x A(x)$

$$\Leftrightarrow \neg\left(A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)\right)$$

$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \wedge \neg A(a_2) \wedge \cdots \neg A(a_n)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

等值式

例2.12(1) 用基本的等值式证明以下公式是等值的:

$$\neg\exists x\big(F(x)\wedge\neg G(x)\big)\Leftrightarrow\forall x\big(F(x)\to G(x)\big)$$

解

$$\begin{aligned}
&\neg\exists x\big(F(x)\wedge\neg G(x)\big) && \\
\Leftrightarrow\ &\forall x\neg\big(F(x)\wedge\neg G(x)\big) && \text{(量词否定等值式)}\\
\Leftrightarrow\ &\forall x\big(\neg F(x)\vee G(x)\big) && \text{(德·摩根律)}\\
\Leftrightarrow\ &\forall x\big(F(x)\to G(x)\big) && \text{(蕴涵等值式)}
\end{aligned}$$

等值式

4. 量词辖域收缩与扩张等值式, B中不含有约束变项x:

(1) $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$ (∨可交换, 本质是分配律)

(2) $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$ (∧可交换, 本质是幂等律)

(3) $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$ (蕴涵等值式后使用(1) , 再用量词否定等值式)

(4) $\forall x\big(B \rightarrow A(x)\big) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$ (蕴涵等值式后使用(1))

(5) $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$ (∨可交换, 本质是幂等律)

(6) $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$ (∧可交换, 本质是分配律)

(7) $\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$ (蕴涵等值式后使用(5), 再用量词否定等值式)

(8) $\exists x\big(B \rightarrow A(x)\big) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$ (蕴涵等值式后使用(5))

只要$A(x)$前没有
$\neg$, $\forall$和$\exists$就不用换

等值式

5. 量词分配等值式

$$(1)\ \forall x\big(A(x)\land B(x)\big)\Leftrightarrow \forall xA(x)\land\forall xB(x)$$

$$(2)\ \exists x\big(A(x)\lor B(x)\big)\Leftrightarrow \exists xA(x)\lor\exists xB(x)$$

- 量词分配等值式表明, ∀对∧, ∃对∨有分配律, 其本质是结合律.
- 然而, ∀对∨, ∃对∧无分配律. 即:

$$(1)\ \forall x\big(A(x)\lor B(x)\big)\not\Leftrightarrow \forall xA(x)\lor\forall xB(x)$$

$$(2)\ \exists x\big(A(x)\land B(x)\big)\not\Leftrightarrow \exists xA(x)\land\exists xB(x)$$

此处双向不成立, 但是单向是否成立呢?

- 此时无法进行量词辖域收缩了，但是能否进行量词辖域扩张呢？可以，使用换名规则!

等值式

例 证明∀对∨，∃对∧无分配律.

解 证明不成立只需举一反例即可，即在某种解释下，两公式不等值. 设个体域为自然数集合**N**, $A(x)$表示“x是奇数”, $B(x)$表示“x是偶数”.

(1) $\forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$的涵义为：任意的自然数不是奇数就是偶数，这是真命题. 而$\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$的涵义为：所有的自然数都是奇数或所有的自然数都是偶数, 这是假命题. 因此$\forall x\big(A(x) \vee B(x)\big) \not\Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$.

(2) $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$的涵义为： 存在奇数的自然数, 也存在偶数的自然数, 这是真命题. 而$\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big)$的涵义为：要求存在一个自然数，它既是奇数, 同时又是偶数, 这是假命题. 因此$\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big) \not\Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$.

等值式

例2.11 设个体域为$D=\{a,b,c\}$, 消去下列公式中的量词:

(1) $\exists x\big(F(x)\wedge G(y)\big)$

解 $\Leftrightarrow \exists xF(x)\wedge G(y)$ (量词辖域收缩, 令$B=G(y)$)

$\Leftrightarrow \big(F(a)\vee F(b)\vee F(c)\big)\wedge G(y)$ (有限个体域中消去量词)

(2) $\forall x\big(F(x)\to \exists yG(y)\big)$

解 $\Leftrightarrow \exists xF(x)\to \exists yG(y)$ (量词辖域收缩, 令$B=\exists yG(y)$)

$\Leftrightarrow \big(F(a)\vee F(b)\vee F(c)\big)\to \big(G(a)\vee G(b)\vee G(c)\big)$

(有限个体域中消去量词)

课堂练习

证明下列等值式:

(1) $\exists x\big(F(x) \rightarrow G(x)\big) \Leftrightarrow \forall x F(x) \rightarrow \exists x G(x)$

(2) $\forall x F(x) \vee \neg\forall x G(x) \Leftrightarrow \forall x \exists y\big(F(x) \vee \neg G(y)\big)$

课堂练习

证明下列等值式:

(1) $\exists x(F(x) \to G(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \to \exists x G(x)$

解

$$\begin{aligned}
& \exists x(F(x) \to G(x)) & \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg F(x) \vee G(x)) & \text{(蕴涵等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \neg F(x) \vee \exists x G(x) & \text{(量词分配等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg \forall x F(x) \vee \exists x G(x) & \text{(量词否定等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x F(x) \to \exists x G(x) & \text{(蕴涵等值式)}
\end{aligned}$$

课堂练习

证明下列等值式:

(2) $\forall xF(x) \vee \neg\forall xG(x) \Leftrightarrow \forall x\exists y\big(F(x) \vee \neg G(y)\big)$

解

$$\forall xF(x) \vee \neg\forall xG(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \neg\forall yG(y) \quad \text{(换名规则)}$$

$$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \exists y\neg G(y) \quad \text{(量词否定等值式)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\big(F(x) \vee \exists y\neg G(y)\big) \quad \text{(量词辖域扩张, 令}B = \exists y\neg G(y)\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\exists y\big(F(x) \vee \neg G(y)\big) \quad \text{(量词辖域扩张, 令}B = F(x)\text{)}$$

前束范式

定义2.11

设A为一谓词公式, 若A具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$$

则称A为前束范式. 其中, $Q_i(1\leq i\leq k)$为量词$\forall$或$\exists$, B为**不含量词**的谓词公式.

- 即公式的**所有量词均出现在公式的最前面**, 且它们的**辖域一直延伸到公式的末尾**.

例 (1) $\forall x\left(F(x)\rightarrow\exists y\big(G(y)\wedge H(x,y)\big)\right)$不是前束范式;

(2) $\exists x\forall y\big(G(y)\rightarrow H(x,y,z)\big)\rightarrow F(x)$不是前束范式;

(3) $\exists x\forall y\forall z\left(\left(P(x,y)\wedge\big(\neg Q(x)\big)\right)\rightarrow\left(R(y,z)\vee\big(\neg Q(x)\big)\right)\right)$是前束范式;

(4) $\forall x\exists y\forall z\big(P(x)\rightarrow Q(y)\wedge R(x,z)\big)$是前束范式.

前束范式

定理 任一谓词公式都可以化成为与之等值的前束范式.

证明 构造性算法步骤如下:

(1) 消去联结词$\to$, $\leftrightarrow$.

(2) 将联结词$\neg$向内深入, 使之只作用于原子公式.

(3) 利用换名规则使所有约束变项的符号均不同, 并且自由变项与约束变项的符号也不同.

(4) 利用量词辖域的扩张和收缩或量词分配等值式, 将所有量词以在公式中出现的顺序移到公式最前面, 扩大量词的辖域至整个公式.

- 前束范式的形式可能不是惟一的.
- 不一定非要使用该构造性算法, 虽然构造性算法总能转化为前束范式.

前束范式

例 2.14 (1) 求$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$的前束范式.

解 $\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ (量词否定等值式)

非构造性算法

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$

(量词分配等值式)

构造性算法

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$

(换名规则)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\forall y\neg G(y))$

(量词辖域扩张, 令$B=\forall y\neg G(y)$)

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$

(量词辖域扩张, 令$B=F(x)$)

前束范式

例2.14(2) $\forall xF(x) \vee \neg\exists xG(x)$的前束范式.

解 $\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall x\neg G(x)$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall y\neg G(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall x\big(F(x) \vee \forall y\neg G(y)\big)$ (量词辖域扩张, 令$B = \forall y\neg G(y)$)

$\Leftrightarrow \forall x\forall y\big(F(x) \vee \neg G(y)\big)$ (量词辖域扩张, 令$B = F(x)$)

前束范式

例2.14(4) 求$\forall xF(x)\to\exists xG(x)$的前束范式.

解 $\Leftrightarrow \forall xF(x)\to\exists yG(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\to\exists yG(y))$ (量词辖域扩张, 令$B=\exists yG(y)$)

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\to G(y))$ (量词辖域扩张, 令$B=F(x)$)

例2.14(5) 求$\exists xF(x)\to\forall xG(x)$的前束范式.

解 $\Leftrightarrow \exists yF(y)\to\forall xG(x)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall y(F(y)\to\forall xG(x))$ (量词辖域扩张, 令$B=\forall xG(x)$)

$\Leftrightarrow \forall y\forall x(F(y)\to G(x))$ (量词辖域扩张, 令$B=F(y)$)

前束范式

例2.14(7) 求$(\forall x F(x,y) \to \exists y G(y)) \to \forall x H(x,y)$的前束范式.

解 $\Leftrightarrow (\forall x F(x,y) \to \exists t G(t)) \to \forall w H(w,y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow (\exists x(F(x,y) \to \exists t G(t))) \to \forall w H(w,y)$ (量词辖域扩张, 令$B = \exists t G(t)$)

$\Leftrightarrow \exists x \exists t\, (F(x,y) \to G(t)) \to \forall w H(w,y)$ (量词辖域扩张, 令$B = F(x,y)$)

$\Leftrightarrow \forall x\, (\exists t(F(x,y) \to G(t)) \to \forall w H(w,y))$ (量词辖域扩张, 令$B = \forall w H(w,y)$)

$\Leftrightarrow \forall x \forall t\, ((F(x,y) \to G(t)) \to \forall w H(w,y))$ (量词辖域扩张, 令$B = \forall w H(w,y)$)

$\Leftrightarrow \forall x \forall t \forall w\, ((F(x,y) \to G(t)) \to H(w,y))$ (量词辖域扩张, 令$B = (F(x,y) \to G(t))$)

前束范式

例2.14(8) 求$\left(\forall xF(x,y) \vee \forall yG(x,y)\right) \wedge \exists zH(x,y,z)$的前束范式.

解 $\Leftrightarrow \left(\forall tF(t,y) \vee \forall wG(x,w)\right) \wedge \exists zH(x,y,z)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall t\left(F(t,y) \vee \forall wG(x,w)\right) \wedge \exists zH(x,y,z)$ (量词辖域扩张, 令$B = \forall wG(x,w)$)

$\Leftrightarrow \forall t\forall w\left(F(t,y) \vee G(x,w)\right) \wedge \exists zH(x,y,z)$ (量词辖域扩张, 令$B = F(t,y)$)

$\Leftrightarrow \forall t\left(\forall w\left(F(t,y) \vee G(x,w)\right) \wedge \exists zH(x,y,z)\right)$ (量词辖域扩张, 令$B = \exists zH(x,y,z)$)

$\Leftrightarrow \forall t\forall w\left(\left(F(t,y) \vee G(x,w)\right) \wedge \exists zH(x,y,z)\right)$ (量词辖域扩张, 令$B = \exists zH(x,y,z)$)

$\Leftrightarrow \forall t\forall w\exists z\left(\left(F(t,y) \vee G(x,w)\right) \wedge H(x,y,z)\right)$ (量词辖域扩张, 令$B = \left(F(t,y) \vee G(x,w)\right)$)

前束范式

- 前束范式的优点在于它的量词全部集中在公式的前面，此部分称为公式的首标.
- 而公式的其余部分可看作是一个不含量词的谓词公式，它被称为公式的尾部.
- 由于在一阶逻辑中的判定问题无解，因此前束范式并不象命题逻辑中的范式那样能解决判定问题.
- 前束范式只是使公式的形式比较整齐规范,为判定工作提供一些方便.

总结: 只是好看,没啥用

前束范式

- 在求给定谓词公式的前束范式时，对量词的左移的次序没有机械地规定，对于尾部也没有进一步的要求, 因此一个公式的前束范式是不唯一的.

例

$$\forall xF(x) \wedge \exists yG(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\exists y\big(F(x) \wedge G(y)\big) \qquad \text{先对}\forall x\text{进行辖域扩张}$$

$$\Leftrightarrow \exists y\forall x\big(F(x) \wedge G(y)\big) \qquad \text{先对}\exists y\text{进行辖域扩张}$$

- 此时, 量词的顺序不影响公式的意义以及真值.
- 然而需要注意的是，该情形仅适用于一元谓词. 当辖域中存在二元谓词且其中变项都是被约束的, 不能改变量词的顺序, 例如$\forall x\exists y\big(F(x,y) \wedge G(y)\big)$.

课堂练习

求以下公式的前束范式.

(1) $\big(\forall x F(x) \vee \exists y G(y)\big) \to \forall x H(x)$

(2) $\forall x F(x) \to \exists y G(x,y)$

课堂练习

求以下公式的前束范式.

(1) $\big(\forall x F(x) \vee \exists y G(y)\big) \rightarrow \forall x H(x)$

解

$\big(\forall x F(x) \vee \exists y G(y)\big) \rightarrow \forall x H(x)$

$\Leftrightarrow \big(\forall x F(x) \vee \exists y G(y)\big) \rightarrow \forall z H(z)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall x\big(F(x) \vee \exists y G(y)\big) \rightarrow \forall z H(z)$ (量词辖域扩张, 令$B = \exists y G(y)$)

$\Leftrightarrow \forall x \exists y\big(F(x) \vee G(y)\big) \rightarrow \forall z H(z)$ (量词辖域扩张, 令$B = F(x)$)

$\Leftrightarrow \exists x\left(\exists y\big(F(x) \vee G(y)\big) \rightarrow \forall z H(z)\right)$ (量词辖域扩张, 令$B = \forall z H(z)$)

$\Leftrightarrow \exists x \forall y\big(F(x) \vee G(y) \rightarrow \forall z H(z)\big)$ (量词辖域扩张, 令$B = \forall z H(z)$)

$\Leftrightarrow \exists x \forall y \forall z\big(F(x) \vee G(y) \rightarrow H(z)\big)$ (量词辖域扩张, 令$B = F(x) \vee G(y)$)

课堂练习

求以下公式的前束范式.

(2) $\forall xF(x) \rightarrow \exists yG(x,y)$

解

$$\begin{aligned}
& \forall xF(x) \rightarrow \exists yG(x,y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall zF(z) \rightarrow \exists yG(x,y) && \text{(换名规则)} \\
\Leftrightarrow\ & \exists z\big(F(z) \rightarrow \exists yG(x,y)\big) && \text{(量词辖域扩张, 令}B = \exists yG(x,y)\text{)} \\
\Leftrightarrow\ & \exists z\exists y\big(F(z) \rightarrow G(x,y)\big) && \text{(量词辖域扩张, 令}B = F(z)\text{)}
\end{aligned}$$

2.4 一阶逻辑推理理论

一阶逻辑推理理论

利用谓词公式间的各种等值关系和蕴涵关系，通过一些推理规则，从一些谓词公式推出另一些谓词公式，这就是一阶谓词中的推理.

定义 在一阶谓词中，推理的形式结构仍为

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C$$

若该公式为重言式，则称推理正确，称C是$H_1, H_2, \dots, H_n$的逻辑结论. 这里$H_1, H_2, \dots, H_n, C$均为一阶谓词中的合式公式.

- 判断推理是否为重言式比在命题逻辑中困难得多.
- 在本节着重介绍构造证明的方法.

推理定律

在一阶谓词中仍称重言的蕴涵式为推理定律. 推理定律的一般来源有以下几种:

(1) 命题逻辑中重言蕴涵式的代换实例. 例如,

$$\forall x F(x) \wedge \exists y G(y) \Rightarrow \forall x F(x) \qquad \text{(化简)}$$

$$\exists x F(x) \Rightarrow \exists x F(x) \vee \exists y G(y) \qquad \text{(附加)}$$

(2) 每个基本等值式生成2条推理定律. 例如,

$$\neg \forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

$$\neg \exists x F(x) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

推理定律

(3) 关于量词分配的4条推理定律, 称为量词分配蕴涵律:

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$$

$$\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

$$\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$

$$\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

- 注意**量词分配蕴涵律**和**量词分配等值式**的区别.

推理规则

- 在推理过程中，除用到命题中已介绍的11条推理规则外，还有下面4条推理规则，不过使用它们是有条件的.
- 在以下4条规则中，均使用了$A \Rightarrow B$的形式，但在这里$A \Rightarrow B$不一定表示$A \rightarrow B$为重言式，而只是表明在一定条件下，当A为真时，B也为真的推理关系.
- 在使用以下规则时均要注意条件，否则会犯错误.

推理规则

一. 全称量词消去规则, 简称为UI规则 (Universal Instantiation) .

这条规则有以下两种形式:

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$
$$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$$

UI规则成立的条件是:

(1) x是$A(x)$中自由出现的个体变项;

(2) 在第1式中, y为**任意的**不在$A(x)$中约束出现的个体变项;

(3) 在第2式中, c为**任意的**个体常项.

- UI规则的意思: 如果个体域的**所有个体都具有性质A**, 则个体域中的**任一个个体具有性质A**.

推理规则

例　设个体域D为实数集, $F(x,y)$：$x < y$, 则 $\forall x \exists y F(x,y)$: 对任意的实数$x$, 都存在实数$y$, 使$x < y$, 这是真命题.

- 若设$A(x) = \exists y F(x,y)$, x在$A(x)$中是自由出现的, 因此条件(1)是满足的. 由于y在$\exists y F(x,y)$中是约束出现, 若在消去量词时用y取代x, 得
$$\forall x \exists y F(x,y) \Rightarrow \exists y F(y,y),$$
其含义为"存在y, $y < y$", 这是假命题, 出错的原因是违背了条件(2).
- 若使用z取代x, 则可满足条件2, 因为z在$\exists y L(x,y)$中不是约束出现. 因此可得
$$\forall x \exists y F(x,y) \Rightarrow \exists y F(z,y).$$
z在$\exists y F(z,y)$中是自由出现, 上式推理成立意味着无论z取任何值, $\exists y F(z,y)$均为真.

推理规则

二. 全称量词引入规则, 简称为UG规则 (Universal Generalization) .

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

UG规则成立的条件是:

(1) y在$A(y)$中自由出现, 且y取任何值时, A均为真;

(2) 取代y的x不能在$A(y)$中约束出现.

- UG规则的意思: 若个体域中任意一个个体都具有性质A, 则个体域中的全体个体都具有性质A.

推理规则

例 仍取实数集合中的$F(x,y)$: $x < y$, 令$A(y) = \exists x F(x,y)$.

- y在$A(y)$中是自由出现的，并且对任意给定的y，$A(y)$是真命题. 此时$A(y)$满足条件(1).
- 在应用UG规则时, 若用x取代y, 得$\forall x \exists x(x < x)$, 则是假命题. 出错的原因是违背了条件(2)，即取代y的x在$A(y)$中是约束出现的.
- 若使用z取代y, 得$\forall z \exists x(x < z)$, 则是真命题. 因为其满足条件(2), 即取代$y$的$z$在$A(y)$中不是约束出现.

推理规则

三. 存在量词引入规则, 简称为EG规则 (Existential Generalization).

$$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$$

EG规则成立的条件是:

(1) c为特定的个体常项; ($A(c)$是前提, 默认为真, 无需验证)

(2) 取代c的x不能在$A(c)$中出现.

- EG规则的意思是: 如果个体域中有某一个体c具有性质A, 则个体域中存在着具有性质A的个体.

推理规则

例　还考虑集合中的$F(x,y)$: $x<y$，令$A(c)=\exists xF(x,c)$并取$c=3$, 则$A(3)=\exists xF(x,3)$.

- $A(3)$是真命题. 3是特定的个体常项, 因此条件(1)满足.
- 若用x取代3, 则得到$\exists x\exists xF(x,x)$, 这是假命题. 出错的原因是x在$\exists xF(x,3)$中出现, 违背了条件(2).
- 若用y取代3，则得到$\exists y\exists xF(x,y)$，这是真命题，y没有在$\exists xF(x,3)$中出现, 满足条件(2).

推理规则

四. 存在量词消去规则, 简称EI规则 (Existential Instantiation) ：

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$$

EI规则成立的条件是:

(1) c是使A为真的特定的个体常项;

(2) c不在$A(x)$中出现;

(3) 若$A(x)$中除x外还有其它自由变项时, 不能用此规则.

- EI规则的意思是：如果个体域存在有性质A的个体，则个体域中必有某一个个体c具有性质A.
- 必须注意：这里的个体c不是任意的，并且用EI时$A(x)$中只能有一个变项.

推理规则

例　个体域为自然数集N, 设$F(x)$: x是奇数; $G(x)$: x是偶数. $\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)$是真命题, 而$\exists x\big(F(x)\wedge G(x)\big)$是假命题.

若令前提: $\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)$, 结论: $\exists x\big(F(x)\wedge G(x)\big)$, 看下面这一段推导:

证明
(1) $\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)$　前提引入
(2) $\exists xF(x)$　(1)化简
(3) $F(c)$　(2)EI
(4) $\exists xG(x)$　(1)化简
(5) $G(c)$　(4)EI
(6) $F(c)\wedge G(c)$　(3), (5)合取引入
(7) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$　(6) EG规则

- 为什么由真命题推出了假命题呢? 原因是违背了EI规则的条件(1). (2)的c是使$F(x)$为真的个体常项, 即某奇数, 此c不能使$G(x)$为真, 于是(5)中的$G(c)$是不成立的. 所以(5)应改为$G(d)$, d是某偶数.

推理规则

例 个体域D为实数集, 仍取$F(x,y)$: $x < y$, $\forall x \exists y(x < y)$是真命题, 然而$\forall x(x < c)$是假命题.

若令前提: $\forall x \exists y(x < y)$, 结论: $\forall x(x < c)$, 看下面这一段推导:

(1)	$\forall x \exists y(x < y)$	前提引入
(2)	$\exists y(z < y)$	(1)UI
(3)	$z < c$	(2)EI
(4)	$\forall x(x < c)$	(3)UG

- 结论(4)是错的，出错原因是违背了EI规则的条件(3)，对(2)使用EI规则时，$\exists y(z < y)$中有自由变项z, 因为不能使用EI规则.
  - 其实同时也违背了EI规则的条件(1), 因为$z < c$不为真.

推理规则

- 在使用以上4个规则时，要**严格按照限制条件**去使用，并**从整体上考虑**个体变项和常项符号的选择，否则会犯错误.
- 这4个规则可形象地称为：“脱帽”与“戴帽”规则,
  - 对全称量词“脱帽(UI)容易戴帽难(UG)”,
  - 对存在量词“戴帽(EG)容易脱帽难(EI)”.

推理规则

例 2.16 证明苏格拉底三段论: “凡人都要死的. 苏格拉底是人. 所以苏格拉底是要死的”.

解 由于没指明个体域, 所以应该使用全总个体域.

设$F(x)$: x是人; $G(x)$: x是要死的, c: 苏格拉底.

前提: $\forall x\big(F(x) \to G(x)\big), F(c)$;

结论: $G(c)$.

证明: (1) $\forall x\big(F(x) \to G(x)\big)$	前提引入
(2) $F(c) \to G(c)$	(1)UI
(3) $F(c)$	前提引入
(4) $G(c)$	(2), (3)假言推理

推理规则

例 2.15(1) 用构造证明法证明下面的推理:

前提: $\forall x(F(x) \to G(x))$, $\exists xF(x)$.

结论: $\exists xG(x)$

证明 (1) $\exists xF(x)$ 前提引入

(2) $F(c)$ (1)EI

(3) $\forall x(F(x) \to G(x))$ 前提引入

(4) $F(c) \to G(c)$ (3)UI

(5) $G(c)$ (2), (4)假言推理

(6) $\exists xG(x)$ (5)EG

推理规则

上例的证明每一步都是严格按推理规则及应满足的条件进行的. 此证明**不能**如下进行:

(1) $\forall x(F(x) \to G(x))$	前提引入
(2) $F(c) \to G(c)$	(1)UI
(3) $\exists x F(x)$	前提引入
(4) $F(c)$	(3)EI

…

- 在以上过程中, (4)是错误的, 违背了EI规则的条件(1): "c是使A为真的特定的个体常项". **因为$F(c) \to G(c)$中的c不一定满足(4)中的c**.
- 然而, 把(4)放在(2)前面是满足推理规则的, 因为UI规则中的条件(3)为"c为任意的个体常项".
- 一般来说, EI规则中得到的常数, 一定满足UI中的条件, 但反之不真, 所以一定要**注意先后顺序**.

推理规则

例 2.15(2) 用构造证明法证明下面的推理:

前提: $\forall x\big(F(x) \rightarrow G(x)\big), \exists x\big(F(x) \wedge H(x)\big)$.

结论: $\exists x\big(G(x) \wedge H(x)\big)$

证明	(1) $\exists x\big(F(x) \wedge H(x)\big)$	前提引入
	(2) $F(c) \wedge H(c)$	(1)EI
	(3) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	前提引入
	(4) $F(c) \rightarrow G(c)$	(3)UI
	(5) $F(c)$	(2)化简
	(6) $G(c)$	(4), (5)假言推理
	(7) $H(c)$	(2)化简
	(8) $G(c) \wedge H(c)$	(6), (7)合取引入
	(9) $\exists x\big(G(x) \wedge H(x)\big)$	(8)EG

此处也需要注意:
一定现有(2), 再有(4)

推理规则

例2.17　用构造证明法证明下面的推理:

前提: $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x)), \forall x(G(x)\rightarrow H(x))$.

结论: $\forall x(G(x)\rightarrow \neg F(x))$.

证明

(1)	$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$	前提引入
(2)	$\forall x(\neg F(x)\vee \neg H(x))$	(1)量词否定等值式&德·摩根律
(3)	$\forall x(H(x)\rightarrow \neg F(x))$	(2)蕴涵等值式
(4)	$H(y)\rightarrow \neg F(y)$	(3)UI
(5)	$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
(6)	$G(y)\rightarrow H(y)$	(5)UI
(7)	$G(y)\rightarrow \neg F(y)$	(6), (4)假言三段论
(8)	$\forall x(G(x)\rightarrow \neg F(x))$	(7)UG

该证明要注意两点:

1. 因为结论中的量词是$\forall$, 所以在一开始构造时就要想着如何使用UG规则, 以及如何使用自由变项y取代x.
2. 不能将(3)和(5)中的x使用UI规则变成个体常项c, 因为我们要的是自由变项y.

课堂练习

证明以下量词分配蕴涵律，并说明反向为什么不成立

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$$

$$\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

课堂练习

证明以下量词分配蕴涵律, 并说明反向为什么不成立

$$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$$

证明

$\Rightarrow$

(1) $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$	前提引入
(2) $\forall xA(x) \vee \forall yB(y)$	(1)换名
(3) $\forall x\big(A(x) \vee \forall yB(y)\big)$	(2)辖域扩张
(4) $A(z) \vee \forall yB(y)$	(3)UI
(5) $\forall y\big(A(z) \vee B(y)\big)$	(4)辖域扩张
(6) $A(z) \vee B(z)$	(5)UI
(7) $\forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$	(6)UG

$\Leftarrow$

(1) $\forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$	前提引入
(2) $A(y) \vee B(y)$	(1)UI
✗ (3) $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$	(4)UG

课堂练习

证明以下量词分配蕴涵律，并说明反向为什么不成立

$$\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

证明

使用EI时需要谨慎，已经满足了$A(c)$的c，不一定满足$B(c)$.

$\Rightarrow$

(1) $\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big)$	前提引入
(2) $A(c) \wedge B(c)$	(1)EI
(3) $A(c)$	(2)化简
(4) $B(c)$	(3)化简
(5) $\exists x A(x)$	(3)EG
(6) $\exists x B(x)$	(4)EG
(7) $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$	(5)(6)合取引入

$\Leftarrow$

(1) $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$	前提引入
(2) $\exists x A(x)$	(1)化简
(3) $\exists x B(x)$	(1)化简
(4) $A(c)$	(2)EI
(5) $B(c)$	(3)EI
(6) $A(c) \wedge B(c)$	(4)(5)合取引入
(7) $\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big)$	(4)EG

推理规则

例 用归谬法证明$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x\big(A(x) \to B(x)\big)$

证明

(1) $\neg\forall x\big(A(x) \to B(x)\big)$	否定结论引入	(7) $\neg B(a)$	(5)化简
(2) $\exists x \neg\big(A(x) \to B(x)\big)$	(1)量词否定等值式	(8) $\exists x A(x)$	(6)EG
(3) $\neg\big(A(a) \to B(a)\big)$	(2)EI	(9) $\exists x A(x) \to \forall x B(x)$	前提引入
(4)$\neg\big(\neg A(a) \vee B(a)\big)$	(3)蕴涵等值式	(10) $\forall x B(x)$	(8),(9)假言推理
(5) $A(a) \wedge \neg B(a)$	(4)德・摩根律	(11) $B(a)$	(10)UI
(6) $A(a)$	(5)化简	(12) $B(a) \wedge \neg B(a)$	(7), (11)矛盾

推理规则

例 用附加前提证明法证明以下量词分配蕴涵律:

$$\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

证明1		证明2	
(1) $\forall x\big(A(x) \to B(x)\big)$	前提引入	(1) $\exists x A(x)$	附加前提引入
(2) $A(y) \to B(y)$	(1)UI	(2) $A(c)$	(1)EI
(3) $\forall x A(x)$	附加前提引入	(3) $\forall x\big(A(x) \to B(x)\big)$	前提引入
(4) $A(y)$	(3)UI	(4) $A(c) \to B(c)$	(3)UI
(5) $B(y)$	(2)(4)假言推理	(5) $B(c)$	(2)(4)假言推理
(6) $\forall x B(x)$	(5)UG	(6) $\exists x B(x)$	(5)EG

推理规则

例 有些迷妹喜欢所有的小鲜肉. 但是所有迷妹都不喜欢吊丝. 所以, 没有一个小鲜肉是吊丝. 证明上述推理是正确的.

解 设$F(x)$: x是迷妹, $G(x)$: x是小鲜肉, $H(x)$: x是吊丝, $L(x,y)$: x喜欢y.

前提: $\exists x\left(F(x) \land \forall y(G(y) \to L(x,y))\right), \forall x\left(F(x) \to \forall y(H(y) \to \neg L(x,y))\right)$

结论: $\neg \exists x(G(x) \land H(x))$

证明

(1) $\exists x\left(F(x) \land \forall y(G(y) \to L(x,y))\right)$	前提引入
(2) $F(c) \land \forall y(G(y) \to L(c,y))$	(1)EI
(3) $F(c)$	(2)化简
(4) $\forall y(G(y) \to L(c,y))$	(2)化简
(5) $\forall x\left(F(x) \to \forall y(H(y) \to \neg L(x,y))\right)$	前提引入
(6) $F(c) \to \forall y(H(y) \to \neg L(c,y))$	(5)UI
(7) $\forall y(H(y) \to \neg L(c,y))$	(3)，(6)假言推理
(8) $\forall y(L(c,y) \to \neg H(y))$	(7)假言易位
(9) $G(z) \to L(c,z)$	(4)UI
(10) $L(c,z) \to \neg H(z)$	(8)UI
(11) $G(z) \to \neg H(z)$	(9)，(10)假言三段论
(12) $\forall x(G(x) \to \neg H(x))$	(11)UG
(13) $\forall x(\neg G(x) \lor \neg H(x))$	(12)蕴涵等值式
(14) $\forall x\left(\neg(G(x) \land H(x))\right)$	(13)德・摩根律
(15) $\neg \exists x(G(x) \land H(x))$	(14)量词否定等值式

课堂练习

(1) 用构造证明法证明下面的推理:

前提: $\forall x\left(F(x) \rightarrow \left(G(y) \wedge H(x)\right)\right)$, $\exists x F(x)$;

结论: $\exists x\left(F(x) \wedge H(x)\right)$.

(2) 每个喜欢玩英雄联盟的人都不喜欢玩王者荣耀. 每个人都喜欢玩王者荣耀或者DOTA. 有的人不喜欢玩DOTA. 因而有的人不喜欢玩英雄联盟. 设个体域为人类集合, 证明上述推理是正确的.

课堂练习

用构造证明法证明下面的推理:

前提: $\forall x\left(F(x) \rightarrow (G(y) \wedge H(x))\right), \exists x F(x)$;

结论: $\exists x(F(x) \wedge H(x))$.

解 (1)	$\exists x F(x)$	前提引入
(2)	$F(a)$	(1)EI
(3)	$\forall x\left(F(x) \rightarrow (G(y) \wedge H(x))\right)$	前提引入
(4)	$F(a) \rightarrow (G(y) \wedge H(a))$	(3)UI
(5)	$G(y) \wedge H(a)$	(2), (4)假言推理
(6)	$H(a)$	(5)化简
(7)	$F(a) \wedge H(a)$	(2), (6)合取引入
(8)	$\exists x(F(x) \wedge H(x))$	(7)EG

课堂练习

(2) 每个喜欢玩英雄联盟的人都不喜欢玩王者荣耀. 每个人都喜欢玩王者荣耀或者DOTA. 有的人不喜欢玩DOTA. 因而有的人不喜欢玩英雄联盟. 设个体域为人类集合, 证明上述推理是正确的.

解 设$F(x)$: x喜欢玩英雄联盟, $G(x)$: x喜欢玩王者荣耀, $H(x)$: x喜欢玩DOTA.

前提: $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$, $\forall x(G(x) \vee H(x))$, $\exists x \neg H(x)$.

结论: $\exists x \neg F(x)$.

证明:

(1) $\exists x \neg H(x)$	前提引入	(6) $\forall x(G(x) \vee H(x))$	前提引入
(2) $\neg H(c)$	(1)EI	(7) $G(c) \vee H(c)$	(6)UI
(3) $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$	前提引入	(8) $G(c)$	(2), (7)析取三段论
(4) $\forall x(\neg F(x) \vee \neg G(x))$	(3)蕴涵等值式	(9) $\neg F(c)$	(8), (5)析取三段论
(5) $\neg F(c) \vee \neg G(c)$	(4)UI	(10) $\exists x \neg F(x)$	(9)EG

本章小结

- 在命题函数中，命题变项的论述范围称作个体域.
- 用来刻划一个个体的性质或多个个体之间关系的词称为谓词.
- 表示有具体确定意义的性质或关系的谓词，称为谓词常项，否则称为谓词变项.
- 量词可看作是对个体词所附加约束的词.
- 对谓词公式的约束变项进行换名时，该变项在量词及其辖域中的所有出现均须同时更改，公式的其余部分不变. 换名时一定要更改为该量词辖域中没有出现过的符号.

本章小结

- 前束范式把量词均放在公式的开头，它们的作用域延伸到整个公式的末尾.
- 在一阶逻辑中任何公式的前束范式都是存在的.
- 在进行构造性证明时，需要善于将语句符号化，熟悉谓词公式的蕴涵与等价式，并且灵活使用4条推理规则.

作业

P53:

1 (4) (7)

2 (4) (8)

3 (3)

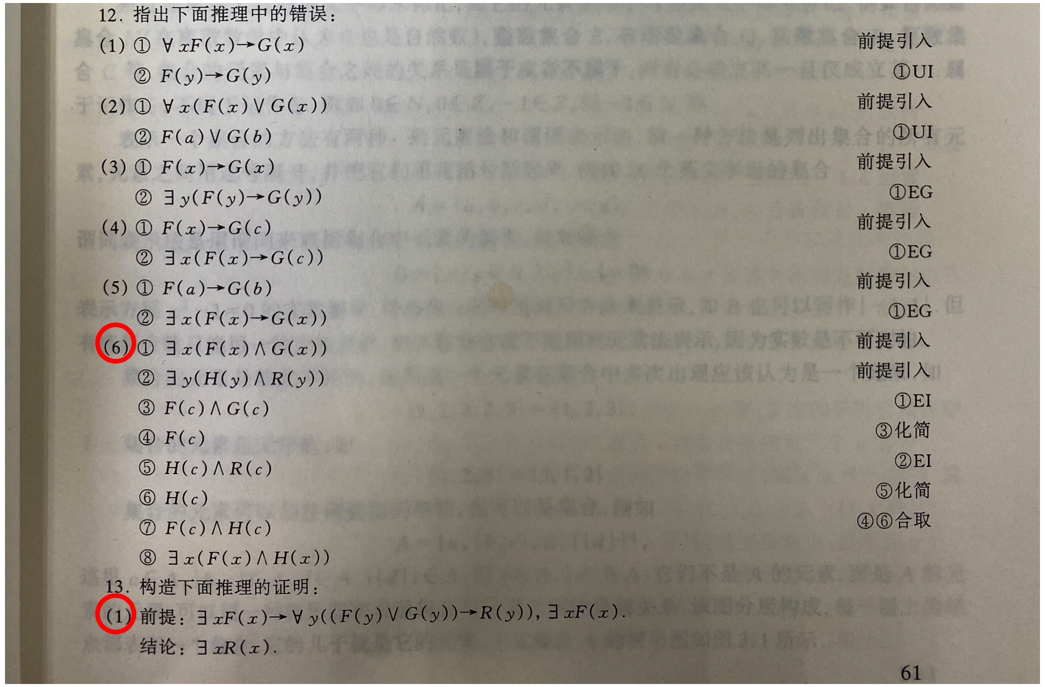
6 (3)

9 (2) (4)

10 (4)

12 (3)

13 (1) (2)



12. 指出下面推理中的错误：

(1) ① $\forall xF(x)\to G(x)$ 前提引入

② $F(y)\to G(y)$ ①UI

(2) ① $\forall x(F(x)\lor G(x))$ 前提引入

② $F(a)\lor G(b)$ ①UI

(3) ① $F(x)\to G(x)$ 前提引入

② $\exists y(F(y)\to G(y))$ ①EG

(4) ① $F(x)\to G(c)$ 前提引入

② $\exists x(F(x)\to G(c))$ ①EG

(5) ① $F(a)\to G(b)$ 前提引入

② $\exists x(F(x)\to G(x))$ ①EG

(6) ① $\exists x(F(x)\land G(x))$ 前提引入

② $\exists y(H(y)\land R(y))$ 前提引入

③ $F(c)\land G(c)$ ①EI

④ $F(c)$ ③化简

⑤ $H(c)\land R(c)$ ②EI

⑥ $H(c)$ ⑤化简

⑦ $F(c)\land H(c)$ ④⑥合取

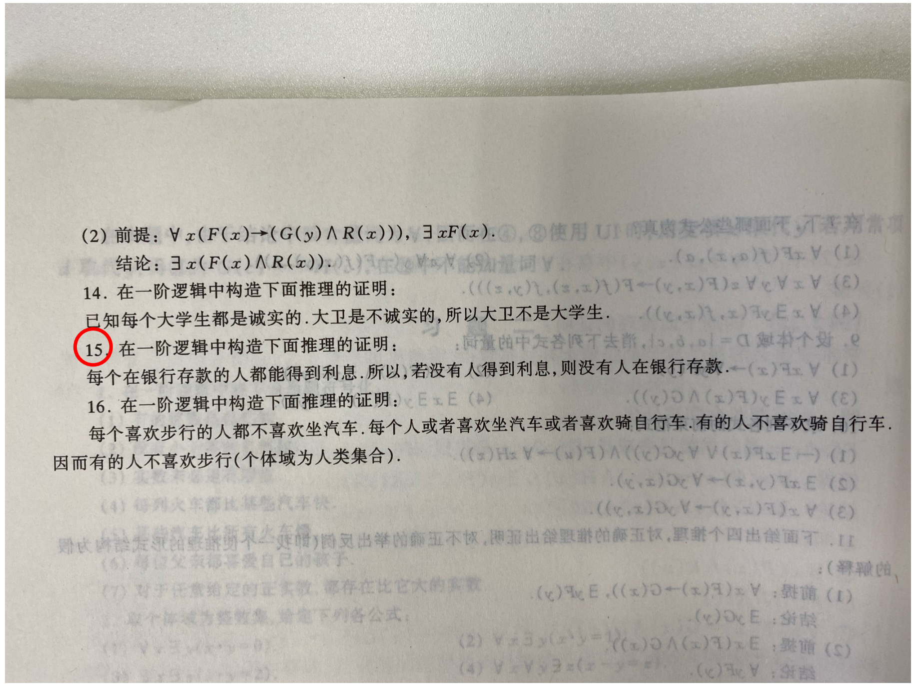
⑧ $\exists x(F(x)\land H(x))$

13. 构造下面推理的证明：

(1) 前提：$\exists xF(x)\to\forall y((F(y)\lor G(y))\to R(y))$，$\exists xF(x)$.

结论：$\exists xR(x)$.

61



(2) 前提：$\forall x(F(x)\to(G(y)\land R(x)))$，$\exists xF(x)$.

结论：$\exists x(F(x)\land R(x))$.

14. 在一阶逻辑中构造下面推理的证明：

已知每个大学生都是诚实的．大卫是不诚实的，所以大卫不是大学生．

15. 在一阶逻辑中构造下面推理的证明：

每个在银行存款的人都能得到利息．所以，若没有人得到利息，则没有人在银行存款．

16. 在一阶逻辑中构造下面推理的证明：

每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车．每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车．有的人不喜欢骑自行车．因而有的人不喜欢步行(个体域为人类集合)．

谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论